

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x - 4}{e^x + 1}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ und mit ihrem Graphen G_f .

1. Bestimmen Sie die Nullstelle von f .
2. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$ und geben Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ sowie Art und Gleichungen der Asymptoten von G_f an.
3. Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f .
4. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_f .
5. Skizzieren Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse möglichst genau den Verlauf von G_f . Zeichnen Sie auch die beiden Asymptoten ein.

Lösungen

1. Bestimmen Sie die Nullstelle von f .
Wir setzen $f(x) = 0$. Daraus folgt: $\frac{e^x - 4}{e^x + 1} = 0$. Da ein Bruch 0 ist, wenn der Zähler 0 ist, folgt hieraus: $e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = 4$ und damit $x_1 = \ln(4)$
2. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$ und geben Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ sowie Art und Gleichungen der Asymptoten von G_f an.
Es ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\rightarrow 0} - 4}{\underbrace{e^x}_{\rightarrow 0} + 1} = \frac{-4}{1} = -4$$

Weiterhin gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. (Man sollte den 2. Grenzwert nur angeben. Zur Begründung kann man z.B. l'Hospital heranziehen, oder man teilt Zähler und Nenner durch e^x oder man überlegt sich, dass -4 im Zähler und 1 im Nenner praktisch keinen Unterschied machen für sehr große x -Werte.) Aus den beiden Grenzwerten ergeben sich die beiden waagrechten Asymptoten $y = 1$ und $y = -4$.

3. Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f .
Als Ableitung ergibt sich mithilfe der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (e^x + 1) - e^x \cdot (e^x - 4)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Mit einer VZ-Tabelle erhält man hier wie gewohnt das Vorzeichen der Ableitung, aber es geht auch schneller: Da $e^x > 0$ ist, ist auch der Zähler $5e^x > 0$. Wegen des Quadrats ist der Nenner offensichtlich ≥ 0 , weil zwei positive Zahlen addiert werden in der Klammer, ist der Nenner sogar > 0 . Damit ist für jeden x -Wert die ganze Ableitung f' größer als 0, und somit ist G_f streng monoton steigend für alle $x \in \mathbb{R}$.

4. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_f .
Wir benötigen die zweite Ableitung der Funktion. Aus $f'(x) = \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2}$ folgt mit der Quotientenregel:

$$f''(x) = \frac{5e^x \cdot (e^x + 1)^2 - 5e^x \cdot 2(e^x + 1) \cdot e^x}{(e^x + 1)^4} \quad \underbrace{\quad}_{\text{Ausklammern im Z}} = \frac{5e^x(e^x + 1) \cdot (e^x + 1 - 2e^x)}{(e^x + 1)^4}$$

$$\underbrace{=}_{\text{Kürzen}} \frac{5e^x \cdot (-e^x + 1)}{(e^x + 1)^3}$$

Aus $g''(x) = 0$ folgt nun $\underbrace{5e^x}_{>0} \cdot (-e^x + 1) = 0$ und damit aus $-e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$ nun

$x_1 = \ln(1) = 0$. Damit haben wir einen Kandidaten für einen Wendepunkt und müssen noch begründen, dass hier wirklich ein Wendepunkt ist. Da dies eine einfache Nullstelle ist, also eine mit Vorzeichenwechsel, ändert sich das Vorzeichen von f'' und daher ist bei 0 ein Wendepunkt. Für den y-Wert davon ergibt sich $f(0) = \frac{e^0 - 4}{e^0 + 1} = \frac{1 - 4}{1 + 1} = -1,5$. Folglich hat der Wendepunkt die Koordinaten $WP(0 | -1,5)$.

5. Skizzieren Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse möglichst genau den Verlauf von G_f . Zeichnen Sie auch die beiden Asymptoten ein.

