Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 4)e^x$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ und mit ihrem Graphen $G_f$.

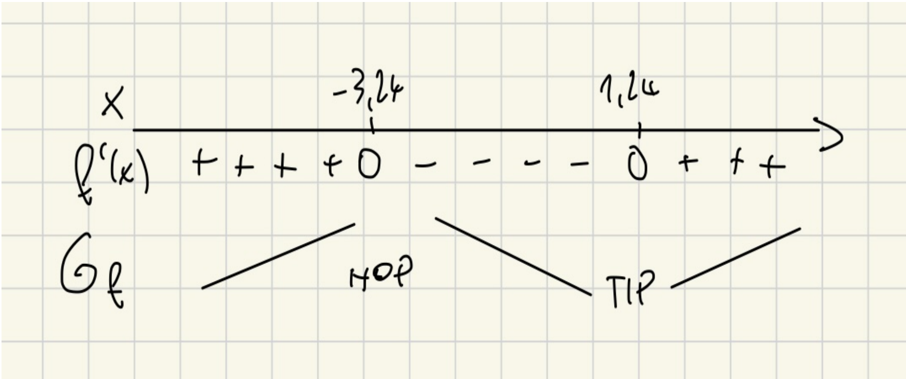
1. Bestimmen Sie alle Schnittpunkte von $G_f$ mit den Koordinatenachsen.
2. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $|x| \to \infty$ und geben Sie damit Art und Gleichung der Asymptote von $G_f$ an.
3. Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von $G_f$ und geben Sie damit Art und Lage der Extrempunkte von $G_f$ an. Runden Sie gegebenfalls auf zwei Nachkommastellen.
4. Skizzieren Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse möglichst genau den Verlauf von $G_f$.

**Lösungen**

1. Bestimmen Sie alle Schnittpunkte von $G_f$ mit den Koordinatenachsen.
   Zuerst berechnen wir den Schnittpunkt mit der y-Achse: Wegen $f(0) = (0^2 - 4)e^0 = -4 \cdot 1 = -4$ ist dieser bei $S_y(0|-4)$. Für die Schnittpunkte mit der x-Achse berechnen wir die Nullstellen: Aus $f(x) = 0$ folgt $(x^2 - 4)\underbrace{e^x}_{>0} = 0$ und damit $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$. Folglich sind die Schnittpunkte mit der x-Achse $S_{x1}(2|0)$ und $S_{x2}(-2|0)$ ((!Merke! Eine Stelle ist immer nur der x-Wert (wie bei Nullstelle, Extremstelle); ein Punkt hat x-Wert und y-Wert (wie Extrempunkt, Wendepunkt)))

2. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $|x| \to \infty$ und geben Sie damit Art und Gleichung der Asymptote von $G_f$ an.
   Wegen $|x| \to \infty$ müssen wir $x \to \infty$ und auch $x \to -\infty$ bestimmen:
   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{(x^2-4)}_{\to\infty}\underbrace{e^x}_{\to\infty} = \infty$$
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x^2-4)}_{\to\infty}\underbrace{e^x}_{\to 0} = 0 \text{ (denn die e-Funktion dominiert)}$$
   Wegen des 2. Grenzwerts hat $G_f$ eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$.

3. Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von $G_f$ und geben Sie damit Art und Lage der Extrempunkte von $G_f$ an.
   Wir benötigen die erste Ableitung, die wir mit der Produktregel erhalten: $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 4)e^x \underbrace{=}_{\text{Ausklammer}} e^x \cdot (x^2 + 2x - 4)$. Extrempunkte haben die Steigung 0, daher erhalten wir sie mit der Gleichung $f'(x) = 0$, woraus $\underbrace{e^x}_{>0} \cdot (x^2 + 2x - 4) = 0$ folgt. Die Gleichung $x^2 + 2x - 4 = 0$ lösen wir nun mit der MNF: $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1} = \frac{-2\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{-2\pm2\cdot\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$. Gerundet ergibt sich: $x_1 \approx -3,24$ und $x_2 \approx 1,24$.
   Mit einer VZ-Tabelle der ersten Ableitung bestimmen wir nun die Monotonie und die Art der Punkte mit Steigung 0:




Wir lesen daraus ab: $G_f$ ist sms in $]-\infty; -3,24]$, $G_f$ ist smf in $[-3,24; 1,24]$ und $G_f$ ist sms in $[1,24; \infty[$ Damit ist bei $-3,24$ ein HOP und bei $1,24$ ein TIP: Es ergibt sich für die y-Werte $f(-3,24) \approx 0,25$ und $f(1,24) \approx -8,51$, also: $HOP(-3,24|0,25)$ und $TIP(1,24|-8,51)$.

4. Skizzieren Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse möglichst genau den Verlauf von $G_f$.