Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3(\ln(x))^2 - \ln(x^3)$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}^+$ und mit ihrem Graphen G_f.

1. Zeigen Sie, dass sich die Funktionsgleichung auch in der Form $f(x) = 3\ln(x) \cdot (\ln(x) - 1)$ darstellen lässt. Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

2. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to 0$ und geben Sie damit Art und Gleichung der Asymptote von G_f an. Geben Sie auch das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \infty$ an.

3. Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und geben Sie damit Art und x-Koordinate des Extrempunkts von G_f an.

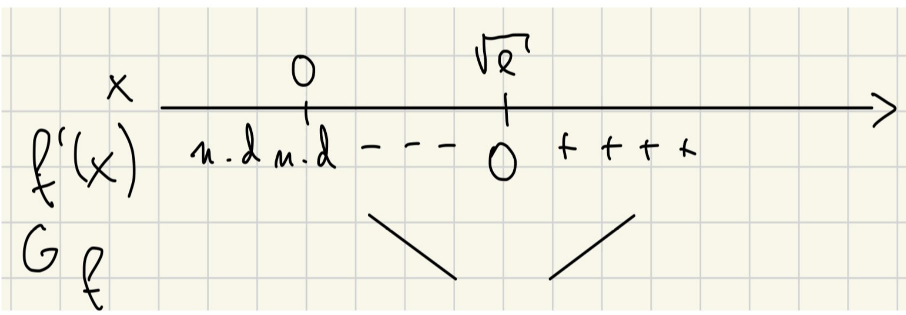
4. Skizzieren Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse möglichst genau den Verlauf von G_f.

Lösungen

1. Zeigen Sie, dass sich die Funktionsgleichung auch in der Form $f(x) = 3\ln(x) \cdot (\ln(x) - 1)$ darstellen lässt. Bestimmen Sie die Nullstellen von f.
   Weil gilt $\ln(x^3) = 3\ln(x)$ (Logarithmusgesetze) folgt:
   $$f(x) = 3(\ln(x))^2 - ln(x^3) = 3(\ln(x))^2 - 3\ln(x) = 3\ln(x) \cdot (\ln(x) - 1),$$
   wobei am Ende $3\ln(x)$ ausgeklammert wurde. Dies war zu zeigen. Zum Bestimmen der Nullstellen setzen wir $f(x) = 0$, wodurch sich die Gleichung $3\ln(x) \cdot (\ln(x) - 1) = 0$ ergibt. Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, also ist entweder $3\ln(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ oder $(\ln(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x_2 = e$.

2. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to 0$ und geben Sie damit Art und Gleichung der Asymptote von G_f an. Geben Sie auch das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \infty$ an.
   Es gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Weiterhin gilt
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{3\ln(x)}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{(\ln(x) - 1)}_{\to -\infty} = \infty.$$
   Damit hat G_f eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 0$.

3. Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und geben Sie damit Art und x-Koordinate des Extrempunkts von G_f an.
   Als Ableitung erhalten wir mit der Produktregel aus $f(x) = 3\ln(x) \cdot (\ln(x) - 1)$ nun:
   $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x}(\ln(x) - 1) + 3\ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot (3(\ln(x) - 1) + 3\ln(x)) = \frac{6\ln(x)-3}{x}$. Aus $f'(x) = 0$ folgt $6\ln(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow 6\ln(x) = 3 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Als Vorzeichentabelle ergibt sich:



Wir lesen ab: G_f ist smf in $]0;\sqrt{e}]$ und G_f ist sms in $[\sqrt{e};\infty[$. Damit ist bei $\sqrt{e}$ offensichtlich ein Tiefpunkt.

4. Skizzieren Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse möglichst genau den Verlauf von G_f.