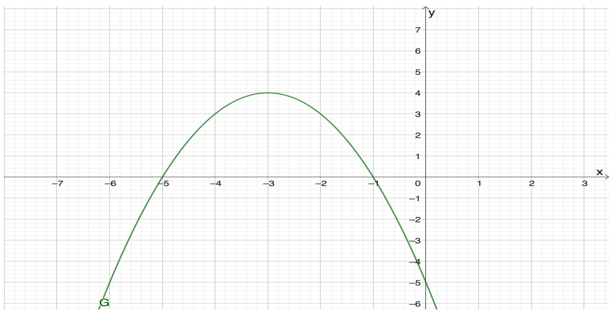
Übung verkettete ln-Funktion

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{2}\ln(-(x^2+6x+5))$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und ihrem Graphen G_f.

1. Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge.
2. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to -1$.
3. Berechnen Sie die Nullstellen von f.
4. Bestimmen Sie Art und Koordinaten des Extrempunkts von G_f.
5. Zeigen Sie, dass der Graph von f keinen Wendepunkt besitzt.

Lösungen

1. Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge.
Da man in die ln-Funktion nur positive Werte einsetzen darf, muss gelten: $-(x^2+6x+5) > 0$. Wir lösen mithilfe einer Skizze, wozu wir zuerst die Gleichung $x^2+6x+5=0$ lösen. Mit der Mitternachtsformel folgt $x_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{-6\pm\sqrt{16}}{2}$. Es folgt $x_1 = -5$ und $x_2 = -1$. Als Skizze ergibt sich damit (nach unten geöffnete Parabel):



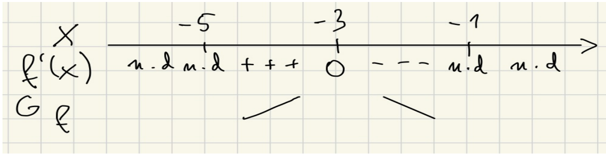
Aus der Skizze lesen wir ab, dass im Intervall $]-5;-1[$ die y-Werte der gezeichneten Parabel oberhalb der x-Achse liegen. Dies ist die Lösungsmenge der Ungleichung, also die Definitionsmenge der gegebenen ln-Funktion: $D_f =]-5;-1[$.

2. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to -1$.
Laut 1. können wir uns nur von links an -1 annähern. Es gilt:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{3}{2}\underbrace{\ln(\underbrace{-(x^2+6x+5)}_{\to 0^+ (s. Skizze)})}_{\to -\infty} = -\infty$$

3. Berechnen Sie die Nullstellen von f.
Weil $\ln(1) = 0$ ist, muss $-(x^2+6x+5) = 1$ sein. Es folgt $-x^2-6x-5 = 1 \Leftrightarrow -x^2-6x-6 = 0$ und mit der Mitternachtsformel folgt nun nach etwas Rechnung $x_1 = -3+\sqrt{3}$ und $x_2 = -3-\sqrt{3}$. Beide Werte gehören zur Definitionsmenge von f.

4. Bestimmen Sie Art und Koordinaten des Extrempunkts von G_f.
Wir benötigen die Ableitung und dafür die Kettenregel. Es ergibt sich: $f'(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{-(x^2+6x+5)}\cdot(-2x-6) = \frac{3}{2}\frac{-2x-6}{-(x^2+6x+5)}$. Aus $f'(x) = 0$ folgt $-2x-6 = 0$, denn ein Bruch ist 0, wenn der Zähler 0 ist. Hieraus ergibt sich: $-2x = 6 \Leftrightarrow x = -3$. Ob dort ein Extrempunkt ist und wenn ja welcher, untersuchen wir mit einer Vorzeichentabelle der Ableitung:



Aus dieser folgt: Bei -3 ist ein Hochpunkt. Den y-Wert erhalten wir mit der Funktion f: $f(-3) = 3\ln(2)$. Also hat der Hochpunkt die Koordinaten $HOP(-3|3\ln(2))$.

5. Zeigen Sie, dass der Graph von f keinen Wendepunkt besitzt.
   Hierzu benötigen wir die 2. Ableitung. Wie zuvor lassen wir den Faktor $\frac{3}{2}$ einfach am Anfang stehen. Damit folgt mit der ersten Ableitung $f'(x) = \frac{3}{2}\frac{-2x-6}{-(x^2+6x+5)}$ aus 4. und der Quotientenregel nun:

$$f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-2 \cdot (-(x^2+6x+5)) - (-2x-6) \cdot (-(2x+6))}{(-(x^2+6x+5))^2}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{2x^2+12x+10-(4x^2+12x+12x+36)}{(x^2+6x+5)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{-2x^2-12x-26}{(x^2+6x+5)^2}$$

Wendepunkte sind Nullstellen der 2. Ableitung und weil ein Bruch 0 ist, wenn der Zähler 0 ist, müssen wir die Gleichung $-2x^2-12x-26=0$ lösen. Mit der Mitternachtsformel folgt $x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2-4\cdot(-2)\cdot(-26)}}{2\cdot(-2)} = \frac{12\pm\sqrt{-64}}{-4}$. Dadurch ergeben sich keine Lösungen, folglich hat die 2. Ableitung keine Nullstelle und somit G_f keinen Wendepunkt.