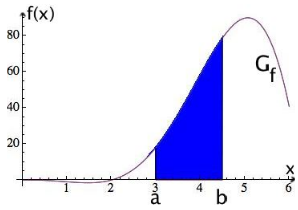
Flächenberechnung mit Hilfe von Integralen

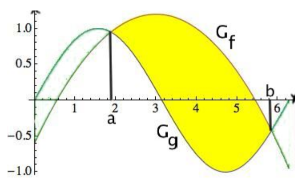
Schreibweise



Um die Fläche zu berechnen, die von einer Funktion und der Koordinatenachse begrenzt wird, benötigt man im Allgemeinen Integrale. Die links markierte Fläche, die begrenzt wird von der x-Achse (unten), f(x) (oben), $a = 3$ (links) sowie $b = 4,5$ (rechts) lässt sich dabei mathematisch beschreiben als:

$$\int_3^{4,5} f(x)dx.$$

Sprich: Integral von *3* bis *4,5* von *f(x)* dx.



Für die Fläche zwischen zwei Kurven gibt es eine sehr ähnliche Schreibweise:

$$\int_a^b f(x) - g(x)dx.$$

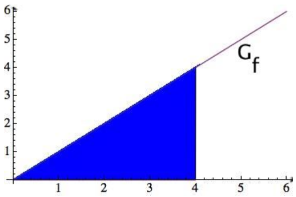
Hierbei ist f diejenige Funktion, deren Schaubild oberhalb von g verläuft.

Berechnung des Integrals

Um den Wert eines Integrals zu berechnen, gibt es ein einfaches Werkzeug - die Stammfunktion.
Definition (Stammfunktion): Man nennt eine Funktion F Stammfunktion von der Funktion f, falls $F' = f$ ist. Also ist F Stammfunktion von f, wenn die Ableitung von F gleich f ist.
Beispiele: (a) Eine Stammfunktion von $f(x) = 2x^2 + 4$ ist die Funktion $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x$. Denn es gilt $F'(x) = 2x^2 + 4 = f(x)$.
(b) Eine Stammfunktion von $f(x) = x^3 - 2x + 4$ ist die Funktion $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 4x - 4$. Auch hier ist $F'(x) = f(x)$.
Mit Hilfe der Stammfunktion lassen sich nun Integrale berechnen, denn es gilt: Ist f stetig und F eine Stammfunktion von f, so ist

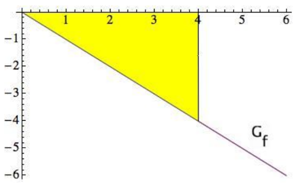
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).}$$

Eine Stammfunktion von f ist die z.B. Funktion $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$, denn es gilt $F'(x) = x = f(x)$. Damit gilt also nach obigem Satz $A = \int_0^4 xdx = F(4) - F(0) = \frac{1}{2}4^2 + 3 - (\frac{1}{2}0^2 + 3) = 8 + 3 - 3 = 8$.
(b) Berechnet werden soll $\int_2^3 x^3 - 2xdx$. Eine Stammfunktion von $x \mapsto x^3 - 2x$ ist $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$. Also gilt $\int_2^3 x^3 - 2xdx = \frac{1}{4}x^4 - x^2|_2^3 = \frac{1}{4}3^4 - 3^2 - (\frac{1}{4}2^4 - 2^2) = \frac{45}{4}$.



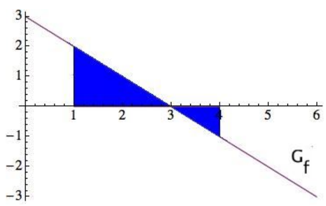
Beispiele: (a) Sei $f(x) = x$. Die links markierte Fläche ist damit beschreibbar als $\int_0^4 x dx$. Da dies ein Dreieck ist, ist die Fläche $A = \frac{1}{2}4 \cdot 4 = 8$ (allgemein beim Dreieck: $A = \frac{1}{2}x \cdot h$, wobei h die Höhe und x die Länge einer Seite ist). Nach obiger Information, kann man die Fläche aber auch mit einer Stammfunktion von f berechnen.

Vorsicht bei Integralen



Ein weiteres Beispiel: Berechnet werden soll die links markierte Fläche, wobei $f(x) = -x$ ist. Wie bei obigem Beispiel auch sollte dabei die Fläche 8 herauskommen. Eine Stammfunktion von $f(x) = -x$ ist gleich $F(x) = -\frac{1}{2}x^2$. Damit berechnet man: $\int_0^4 -x dx = F(4) - F(0) = -\frac{1}{2}4^2 - (-\frac{1}{2}0^2) = -8$. Der Wert, der herauskommt ist also -8, eine negative Zahl. Eine negative Fläche ergibt aber keinen Sinn!

Dass ein negativer Wert bei dem Integral herauskommt liegt daran, dass Integrale nicht ganz den entsprechenden Flächen entsprechen; sie sind etwas allgemeineres, weil sie auch negativ werden können.
Für die Flächenberechnung ist hierbei nur eine Eigenschaft von Integralen wichtig: Integrale, bei denen das Schaubild der Funktion unterhalb der x-Achse liegt, haben einen negativen Wert, aber abgesehen davon den richtigen Wert. Will man eine Fläche berechnen, muss man bei diesem negativen Wert also nur das Vorzeichen zu Plus ändern. Auch hierzu zwei ...
Beispiele: (a) Zu berechnen ist die Fläche, die von der x-Achse und der Funktion $f(x) = x^2 - 4$ begrenzt wird. Das Schaubild der Funktion f ist eine Parabel, deren Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse liegt. Die Nullstellen von f sind bei -2 und 2. Damit muss man von -2 bis 2 integrieren. Man erhält $\int_{-2}^2 x^2 - 4dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x|_{-2}^2 = \frac{1}{3}2^3 - 4 \cdot 2 - (\frac{1}{3}(-2)^3 - 4(-2)) = -\frac{32}{3}$. Die gesuchte Fläche hat damit den Wert $\frac{32}{3}$.
Um also die Fläche auszurechnen, kann man entweder das Integral nehmen und dann bei negativen Werten als Fläche einfach den positiven Wert nehmen, oder man schreibt um das Integral einfach überall Betragsstriche. Dieser Teil ist positiv. Danach integriert man von der Nullstelle bis zum



(b) Die links markierte Fläche soll berechnet werden. Dabei ist $f(x) = -x + 3$. Gemeinerweise liegt ein Teil der Fläche oberhalb der x-Achse, ein weiterer unterhalb. Auch hier helfen Integrale weiter. Da aber der Teil unterhalb der x-Achse negativ zählt, muss man die gesuchte Fläche über zwei getrennte Integrale berechnen. Zuerst integriert man vom Startpunkt bis zur Nullstelle der Funktion.

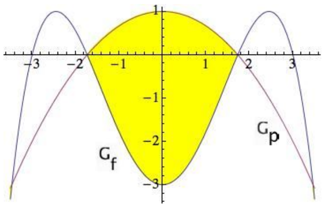
Endpunkt. Hier kommt etwas negatives heraus (da das Integral unterhalb der x-Achse liegt). Da man die Fläche will, muss man den positiven Wert hiervon nehmen. Die insgesamt gesuchte Fläche ist dann einfach die Summe der beiden gefundenen Werte:
Es gilt $\int_1^3 -x + 3dx = -\frac{1}{2}x^2 + 3x|_1^3 = -\frac{1}{2}3^2 + 3 \cdot 3 - (-\frac{1}{2}1^2 + 3 \cdot 1) = 2$ und weiterhin $\int_3^4 -x + 3 = -\frac{1}{2}$.

Die gesuchte Fläche ist damit

$$\int_1^3 f(x)dx + \left| \int_3^4 f(x)dx \right| = 2 + \frac{1}{2} = 2,5.$$

Musteraufgabe

Aus der APR 11: Es ist $f : x \mapsto -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3$ und $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1$.
Zeichnen Sie die beiden Graphen im Bereich $-3,5 \leq x \leq 3,5$ in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Die Funktionen f und p schließen drei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl desjenigen Flächenstücks, das den Ursprung enthält, auf zwei Nachkommastellen genau.



Setzt man beide Funktionen gleich, so erhält man die beiden Grenzwerte der Integration. Da diese bei $\pm\sqrt{3}$ liegen, sieht man, das die gesuchte Fläche von $-\sqrt{3}$ und $\sqrt{3}$ begrenzt wird. Damit berechnet man: $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} p(x) - f(x)dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{3}x^2 + 4dx = \frac{76}{5\sqrt{3}} \approx 8,78$.