

Lösungen zu Ebenen in der Koordinatenform

Hinweise: Nicht alle Lösungen sind ausführlich gerechnet. Da Darstellungen von Ebenen nicht eindeutig sind, ist es auch möglich, dass man andere Darstellungen erhält. Bei Ebenen in Koordinatenform kann man leicht prüfen, ob die eigene Lösung korrekt ist, nämlich dann, wenn man diese mit einer Zahl so multiplizieren kann, dass sich die angegebene Gleichung ergibt.

1. Entwickeln Sie aus der Parametergleichung der Ebene E (mit $r, s \in \mathbb{R}$) eine Darstellung der Ebene E in Koordinatenform.

- (a) Hinweis: Bei der ersten Teilaufgabe wird eine alternative Lösungsmöglichkeit gezeigt. Einfacher ist es für die meisten vermutlich, wenn Sie den Umweg über die Normalenform gehen, wobei man den Normalenvektor als Ergebnis des Vektorprodukts der beiden Richtungsvektoren bekommt.

Man formt $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ um und erhält:

$$\begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 1 \\ x_3 + 1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dies schreibt man als LGS und bringt es auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & -4 & x_1 - 3 \\ 4 & 8 & x_2 - 1 \\ 6 & 2 & x_3 + 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} 5II - 2I \\ 5III - 3I \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 10 & -4 & x_1 - 3 \\ 0 & 48 & 5x_2 - 2x_1 + 1 \\ 0 & 22 & 5x_3 - 3x_1 + 14 \end{array} \right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10 & -4 & x_1 - 3 \\ 0 & 48 & 5x_2 - 2x_1 + 1 \\ 0 & 0 & -48(5x_3 - 3x_1 + 14) + 22(5x_2 - 2x_1 + 1) \end{array} \right)$$

Schreibt man nun die dritte Zeile als Gleichung, so erhält man die Koordinatenform der Ebene E: $0 \cdot r + 0 \cdot s = -48(5x_3 - 3x_1 + 14) + 22(5x_2 - 2x_1 + 1) \Leftrightarrow 0 = -240x_3 + 144x_1 - 672 + 110x_2 - 44x_1 + 22 \Leftrightarrow 100x_1 + 110x_2 - 240x_3 = 650$.

(b) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es ergibt sich $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 29 \\ 17 \end{pmatrix}$

In Normalenform: $\begin{pmatrix} -9 \\ 29 \\ 17 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

In Koordinatenform: Wegen $\begin{pmatrix} -9 \\ 29 \\ 17 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-9) + 1 \cdot 29 + 0 \cdot 17 = 29$ ergibt

sich: $E : -9x_1 + 29x_2 + 17x_3 = 29$

(c) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ Es ergibt sich $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

In Normalenform: $\begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$

In Koordinatenform: Wegen $\begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 13 \cdot (-4) + (-7) \cdot 1 + (-4) \cdot 2 = -67$

ergibt sich: $\Rightarrow E : 13x_1 - 7x_2 - 4x_3 = -67$

(d) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ Es ergibt sich $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 26 \\ -8 \end{pmatrix}$

In Normalenform: $\begin{pmatrix} -19 \\ 26 \\ -8 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$

In Koordinatenform: Wegen $\begin{pmatrix} -19 \\ 26 \\ -8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -19 \cdot 1 + 26 \cdot 1 + (-8) \cdot 0 = 7$ ergibt

sich: $\Rightarrow E : -19x_1 + 26x_2 - 8x_3 = 7$

2. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an.

Hinweis: Im Folgenden werden verschiedene Lösungswege gezeigt. Empfehlung: Drei Punkte bestimmen, so wie bei Teilaufgabe (a) gezeigt wird.

(a) $E: -5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

Mit drei Punkten: Setzt man $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$, so ergibt sich die Gleichung $-5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - x_3 = 0$ Mit $x_3 = 0$ ergibt sich eine wahre Aussage, also gehört der Punkt $A(0|0|0)$ zur Ebene E. Setzt man $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$, so ergibt sich $-3 - x_3 = 0$, also $x_3 = -3$. Der Punkt $B(1|1|-3)$ gehört zur Ebene E. Setzt man $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$, so erhält man $2 - x_3 = 0$, also $x_3 = 2$, folglich gehört der Punkt $C(0|1|2)$ zur Ebene E.

Stellt man die Drei-Punkte-Form der Ebene auf, so erhält man:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) $E: 5x_1 + 10x_2 - 10x_3 = -60$

Setzen von Parametern: Man formt zunächst nach x_1 um. Es ergibt sich: $5x_1 = 10x_3 - 10x_2 - 60 \Leftrightarrow x_1 = 2x_3 - 2x_2 - 12$. Nun setzt man die Parameter: $x_2 = r$ und $x_3 = s$. Dadurch und mit obiger Umformung ergibt sich: $x_1 = 2s - 2r - 12$. Schreibt man die drei Komponenten x_1 , x_2 und x_3 in Vektorschreibweise, dann ergibt sich die

Ebene in Parameterform: $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(c) \quad E: 7x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad E: -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Wie ja auch in der Aufgabe steht, sind auch hier verschiedene Lösungswege denkbar. Für die meisten am einfachsten wird es sein, die Ebene zunächst in der Drei-Punkte-Form anzugeben und dann diese Parameterdarstellung in die Koordinatenform umzurechnen. In der Drei-Punkte-Form lautet die Ebenengleichung z.B.: $E: \vec{x} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{AC}$.

- (a) $A(3|4|0)$, $B(2|8|2)$ und $C(-1|4|1)$

Eine Ebene in Koordinatenform lautet $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit bestimmten Zahlen a , b , c (nicht alle 0) und d . Mit Hilfe der Punkte A , B und C versucht man diese Unbekannten a , b , c und d nun zu bestimmen.

Setzt man den Punkt $A(3|4|0)$ in die allgemeine Koordinatenform ein, so erhält man die Gleichung: $3a + 4b + 0 \cdot c = d$. Setzt man den Punkt $B(2|8|2)$ ein, so ergibt sich die Gleichung $2a + 8b + 2c = d$ und durch Punkt $C(-1|4|1)$ erhält man $-a + 4b + c = d$. Da man nur drei Gleichungen hat, aber vier Unbekannte, kann man nicht eindeutig lösen. Da uns jedoch eine Lösung genügt, setzen wir $d = 1$ und lösen das daraus resultierende Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten (ergibt sich dadurch ein Widerspruch, so sollten wir es mit der Wahl $d = 0$ erneut versuchen, das LGS zu lösen): $-a + 4b + c = d$, $3a + 4b + 0 \cdot c = 1$ und $2a + 8b + 2c = d$ mit Gauß:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} 3I + II \\ 2I + III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 3 & 4 \\ 0 & 16 & 4 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ III - II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Aus der untersten Zeile der Zeilenstufenform erhält man die Lösung $c = -1$. Setzt man dies eine Zeile weiter oben ein, so ergibt sich $16b - 3 = 4$, also $b = \frac{7}{16}$ und wenn man beides in die erste Zeile setzt, so erhält man $-a + 4 \cdot \frac{7}{16} - 1 = 1$, also $a = -\frac{1}{4}$. Somit ergibt sich die Ebenengleichung $E: -\frac{1}{4}x_1 + \frac{7}{16}x_2 - x_3 = 1$.

- (b) $A(-4|1|1)$, $B(3|5|1)$ und $C(-4|0|3)$

Mit der Wahl $d = 53$ ergibt sich $E: -8x_1 + 14x_2 + 7x_3 = 53$.

- (c) $A(0|6|-9)$, $B(-1|1|1)$ und $C(-2|5|-2)$

Mit der Wahl $d = 3$ ergibt sich $E: -25x_1 - 13x_2 - 9x_3 = 3$.

- (d) $A(7|5|3)$, $B(3|9|-5)$ und $C(4|2|2)$

Mit der Wahl $d = 6$ ergibt sich $E: 7x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 6$.

4. Wir haben gelernt: Damit die Gleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ eine Ebene beschreibt, darf nicht $a = b = c = 0$ sein.

Ist $a = b = c = 0$, so lautet die Gleichung $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = d$. Ist $d = 0$ so wird hieraus $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$. Dies gilt für alle Punkte des $\mathbb{R}^3$, d.h. diese Gleichung beschreibt den kompletten Raum. Ist $d \neq 0$, so ergibt sich die Aussage $0 = d$, was kein Punkt des $\mathbb{R}^3$ erfüllt. D.h. die leere Menge wird durch diese Gleichung beschrieben.

5. Gegeben ist die Ebene E mit $E: 2x_1 - x_2 = 6$. Testen Sie, welche der folgenden Punkte zu dieser Ebene gehören:

$A(2|-2|0)$, $B(1|0|3)$, $C(3|0|4)$, $D(-1|-8|2)$ und $E(1|1|17)$

Um zu testen, ob die Punkte zur Ebene gehören, setzen wir sie in die Ebenengleichung ein

und testen, ob dadurch eine wahre Aussage entsteht:

$A(2|-2|0)$: $2 \cdot 2 - (-2) = 6$ Dies ist eine wahre Aussage, also gehört A zur Ebene.

$B(1|0|3)$: $2 \cdot 1 - 0 = 2 \neq 6$. B gehört nicht zur Ebene.

$C(3|0|4)$: $2 \cdot 3 - 0 = 6$. Dies ist eine wahre Aussage, also gehört C zur Ebene.

$D(-1|-8|2)$: $2 \cdot (-1) - (-8) = 6$. Dies ist eine wahre Aussage, also gehört C zur Ebene.

$E(1|1|17)$: $2 \cdot 1 - 1 = 1 \neq 6$. Der Punkt gehört nicht zur Ebene.