Lösungen zu den Ungleichungen

Lineare Ungleichungen 1. Aufgabe:
(a) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x > 14\}$
(b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -11\}$
(c) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x < -\frac{36}{5}\}$
(d) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -\frac{2}{3}\}$
(e) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x > -2\}$
(f) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{29}{12}\}$

Quadratische Ungleichungen 2. Aufgabe:
(a) Mit MNF: $x_1 = -\frac{3}{2}$ und $x_2 = 4$. Mit VZ-Tabelle: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{3}{2} \leq x \leq 4\}$.
(b) Mit MNF: $x_1 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{53})$ und $x_2 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{53})$. Mit VZ-Tabelle: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x_1 < x < x_2\}$.
(c) Mit MNF: $b_1 = \sqrt{3}$ und $b_2 = -\sqrt{3}$. Es gilt: $\mathbb{L} = \{b \in \mathbb{R} | b < -\sqrt{3}$ oder $b > \sqrt{3}\}$
(d) $\mathbb{L} = \{l \in \mathbb{R} | l \leq -4$ oder $l \geq 0\}$.
(e) Die Ungleichung $\frac{1}{3}r^2 - \frac{1}{3}r - 2 \leq 0$ hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{r \in \mathbb{R} | -2 \leq r \leq 3\}$.
(f) $\mathbb{L} = \{y \in \mathbb{R} | y \leq \frac{1}{3}(-6-\sqrt{123})$ oder $y \geq \frac{1}{3}(-6+\sqrt{123})\}$.
(g) Die angegeben Ungleichung hat keine Lösung: $\mathbb{L} = \emptyset$.
(h) Die einzige Zahl, die keine Lösung der Ungleichung ist, ist -3, denn für jede reelle Zahl ungleich 0 ist das Quadrat dieser Zahl größer als 0. Damit gilt $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -3\}$.

Quadratische Ungleichungen mit Parameter 3. Aufgabe:
(a) In dieser Form lässt sich leicht ablesen, für welche Werte von x der linke Term 0 ergibt (für x=2 und x=-3). Ebenso erkennt man, dass das Vorzeichen des Terms von a abhängt:
Ist $a = 0$, so besitzt die Ungleichung keine Lösung.
Ist $a < 0$, so gilt $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 2\}$.
Ist $a > 0$, so gilt $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x < -3$ oder $x > 2\}$.
(b) Analog zu (a): Ist $a = 0$, so gilt $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.
Ist $a < 0$, so gilt $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{2} \leq x \leq 3\}$.
Ist $a > 0$, so gilt $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -\frac{1}{2}$ oder $x \geq 3\}$.
(c) Mit der Mitternachtsformel berechnet man, dass $-x^2 + ax - 3x + 3a = 0$ die Lösungen $x_1 = -3$ und $x_2 = a$ besitzt. Damit gilt, dass die angegebene Ungleichung äquivalent ist zu $-(x+3)(x-a) < 0$. Für die VZ-Tabelle muss man wissen, welche der beiden Werte a und -3 kleiner ist. Daher ist auch hier eine Fallunterscheidung notwendig:
Ist $a = -3$, so lautet die Ungleichung $-(x+3)^2 < 0$ und es gilt $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -3\}$
Ist $a < -3$, so ist $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x < a$ oder $x > -3\}$.
Ist $a > -3$, so gilt $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x < -3$ oder $x > a\}$.
(d) Die Gleichung $0 = -2x^2 - 2ax + 2x + 2a$ hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -a$. Analog zu (c) muss man nach der relativen Lage der Nullstellen zueinander unterscheiden:
Ist $a = -1$, so gilt $\mathbb{L} = \{1\}$.
Ist $a < -1$, so ist $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq -a\}$.
Ist $a > -1$, so ist $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -a \leq x \leq 1\}$.

