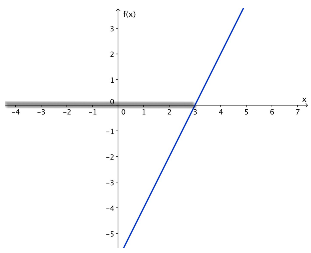
Lineare und quadratische Ungleichungen

Gleichungen wie z.B. $x^2 - 3x = -4x$ sind bekannt: Man kann sie an dem Zeichen = erkennen, welches zwei Terme mit Unbekannten voneinander trennt. Je nach Gleichung kann es eine oder auch mehrere Lösungen geben, d.h. Zahlen, die man für die Unbekannten einsetzen kann, so dass sich eine wahre Aussage ergibt, also so, dass auf beiden Seiten der gleiche Wert entsteht. (Obige Gleichung z.B. hat die Lösungen 0 und -1, da sowohl $0^2 - 3 \cdot 0 = -4 \cdot 0$ als auch $(-1)^2 - 3 \cdot (-1) = -4 \cdot (-1)$ ist.)
Bei Ungleichungen ist das = ersetzt durch eines der Zeichen $<, \leq, >$ oder $\geq$. Auch bei gegebenen Ungleichungen sucht man alle x-Werte, die in die Ungleichung eingesetzt, eine wahre Aussage ergeben. Im folgenden wird erklärt, wie man die Lösungen von linearen und quadratischen Ungleichungen bestimmen kann.

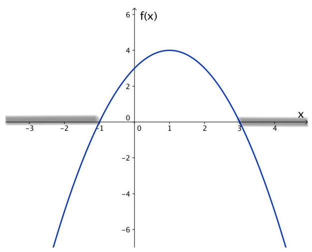
Lineare Ungleichungen: Bei linearen Ungleichungen bestehen die Terme nur aus Zahlen und Vielfachen einer Unbekannten. Damit ist z.B. $3x \geq 9$ eine lineare Ungleichung, nicht jedoch $3x^{\mathbf{3}} < 7x$. Diese Ungleichungen lassen sich recht einfach lösen, wenn man beim Rechnen auf eine Besonderheit achtet, die für alle Ungleichungen gilt:
Achtung: Bei Multiplikation mit negativen Zahlen dreht sich das Ungleich-Zeichen um. D.h. aus $<$ wird $>$, aus $\leq$ wird $\geq$ und auch andersherum.
Beispiele: (a) Zu lösen ist $4x - 3 \leq \frac{1}{2}(4x + 6)$
Zunächst vereinfacht man die rechte Seite und erhält $4x - 3 \leq 2x + 3$. Löst man nach x auf, so erhält man wie bei Gleichungen auch. $2x \leq 6$, was äquivalent ist zu $x \leq 3$. Hieraus liest man die Lösungsmenge direkt ab: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$.
(b) $x^2 - 4x + 3 > \frac{1}{4}(2x - 3)^2$
Formt man diese Ungleichung um, so erhält man eine lineare Ungleichung:
$x^2 - 4x + 3 > \frac{1}{4}(2x - 3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > \frac{1}{4}(4x^2 - 12x + 9) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > x^2 - 3x + \frac{9}{4} \Leftrightarrow -4x + 3 > -3x + \frac{9}{4}$.
Nun geht es weiter wie bei dem ersten Beispiel auch: $-4x + 3 > -3x + \frac{9}{4} \Leftrightarrow -x > -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x < \frac{3}{4}$. Man beachte, dass bei Multiplikation von -1 aus $>$ das Zeichen $<$ wurde. Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x < \frac{3}{4}\}$.
(c) Obwohl das rechnerische Lösen von linearen Ungleichungen keine Probleme machen sollte, sei hier im Hinblick auf den nächsten Abschnitt noch eine zeichnerische Lösungsmöglichkeit für lineare Ungleichungen erwähnt: Betrachten wir erneut die Ungleichung aus (a), nämlich $4x - 3 \leq \frac{1}{2}(4x + 6)$. Wir formen nun so um, dass auf einer Seite 0 steht: $4x - 3 \leq 2x + 3 \Leftrightarrow 2x - 6 \leq 0$. Fasst man die linke Seite als eine Funktion f auf, so ist $f(x) = 2x - 6$ und die Ungleichung lautet $f(x) \leq 0$. Das Schaubild von f ist eine Gerade:



Die gesuchten Lösungen kann man aus der Skizze ablesen: Gesucht werden diejenigen x-Werte, so dass $f(x) \leq 0$ ist. Nun ist $f(x) \leq 0$, falls das Schaubild von f unterhalb der x-Achse ist oder auf der x-Achse liegt. Man erkennt an der Skizze: Dies sind diejenigen x, so dass $x \leq 3$ ist. Also gilt $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$, wie wir auch schon rechnerisch erhalten haben.

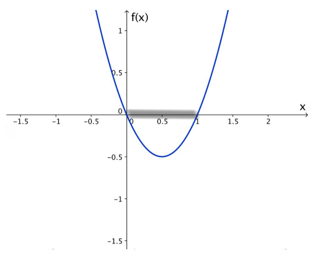
Der Vorteil dieses zeichnerischen Lösungsweges ist nun, dass er sich leicht auf kompliziertere Ungleichungen erweitern lässt:

Quadratische Ungleichungen zeichnerisch lösen: (a) Der Lösungsweg wird zunächst anhand der quadratischen Ungleichung $2x^2+5x+7 \leq 3x^2+3x+4$ veranschaulicht.
Zunächst formt man die gegebene Ungleichung so um, dass auf der einen Seite nur die 0 stehen bleibt. So wird $2x^2+5x+7 \leq 3x^2+3x+4$ umgeformt zu $-x^2+2x+3 \leq 0$.
Man betrachtet nun die Funktion $f(x) = -x^2+2x+3$. Lösungen der obigen Ungleichung sind dann Zahlen x, so dass $f(x) \leq 0$ ist. Da wir diese anhand des Schaubilds von f ablesen wollen, ist es ratsam die Nullstelle(n) zu berechnen. Man sollte zudem wissen, ob die Parabel nach unten oder oben geöffnet ist. Daher:
Im Beispiel lautet die Funktion, die zu zeichnen ist, wie schon erwähnt $f(x) = -x^2+2x+3$. Diese hat Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ (mit MNF nachrechnen!) und ist nach unten geöffen, da vor x^2 ein Minus steht.
Von einer Skizze des Schaubilds von f kann man nun die Lösungen der Ungleichung ablesen.



Weil die Ungleichung $f(x) \leq 0$ lautet, sind diejenigen x-Werte gesucht, bei denen das Schaubild von f unterhalb oder auf der x-Achse liegt. Dies sind die x-Werte links von -1 und rechts von 3, wobei beide Randpunkte zu der Lösungsmenge gehören.

Die abgelesene Lösung muss nur noch aufgeschrieben werden: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1 \text{ oder } x \geq 3\}$.
(b) Zu lösen ist die quadratische Ungleichung $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 < -\frac{3}{2}x^2 + 3$.
Formt man um, so erhält man die Ungleichung $2x^2 - 2x < 0$. Zu zeichnen ist also die Funktion $f(x) = 2x^2 - 2x$. Die Nullstellen dieser Funktion sind bei 0 und 1, da $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x-1) = 0$. Da die Parabel nach oben geöffnet ist, ergibt sich folgende Skizze:



Weil die Ungleichung $f(x) < 0$ lautet, sind diejenigen x-Werte gesucht, bei denen das Schaubild von f unterhalb der x-Achse liegt. Dies sind die x-Werte zwischen 0 und 1, also die x-Werte, die sowohl größer als 0 als auch kleiner als 1 sind, wobei beide Randpunkte nicht zu der Lösungsmenge gehören (wegen $<$ und nicht $\leq$).

Somit lautet die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \text{ und } x < 1\}$.

Quadratische Ungleichung rechnerisch lösen: Auch hier wird der Lösungsweg anhand von Beispielen erörtert. Benötigt wird dabei folgender …
Satz: Besitzt die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ die beiden Nullstellen x_1 und x_2, so lässt sich f darstellen in der Form $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
(a) Lösen wir auch hier die quadratische Ungleichung $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 < -\frac{3}{2}x^2 + 3$ (s.o.).
Die ersten Lösungsschritte bei der rechnerischen Lösung sind identisch mit denen der zeichnerischen Lösung: Man formt die quadratische Ungleichung so um, dass auf einer Seite 0 steht und berechnet dann die Nullstellen. Dies wurde im letzten Abschnitt bereits getan: Man kam darauf, dass $f(x) = 2x^2 - 2x$ Nullstellen bei 0 und 1 besitzt. Nach obigem Satz ist damit die Ungleichung $2x^2 - 2x < 0$ äquivalent zu $2 \cdot x \cdot (x - 1) < 0$. Das Vorzeichen des Terms auf der linken Seite setzt sich aus den Vorzeichen der einzelnen Faktoren des Produkts zusammen. Damit kann man das Vorzeichen mit einer Vorzeichentabelle bestimmen.

		0	1
x	−	+	+
(x−1)	−	−	+
f(x)	+	−	+

Ganz oben stehen die bekannten Nullstellen der Funktion, darunter ist erstmal für jeden der Faktoren das Vorzeichen in dem entsprechenden Bereich eingetragen. Damit kann man einfach das Vorzeichen des gesamten Terms bestimmen, was in der letzten Zeile gemacht wurde. Man muss nur beachten: $- \cdot - = +$, bzw. $- \cdot + = -$. Da das Vorzeichen des Faktors 2 immer $+$ ist, wurde auf diesen Faktor bei der Vorzeichentabelle verzichtet.

Wie man sieht ist die Lösungsmenge identisch zu der, die mit Hilfe der Skizze erhalten wurde.
(b) Ein weiteres Beispiel im Schnelldurchgang: Zu lösen ist die quadratische Ungleichung $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} < 0$.
Nullstellen der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ ergeben sich aus der Mitternachtsformel zu 2 und $-\frac{1}{2}$. Damit kann man f in der Form $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x+\frac{1}{2})$ schreiben. Für diese Funktion ergibt sich folgende Vorzeichentabelle:

		−0,5	2
−0,5	−	−	−
(x+0,5)	−	+	+
(x−2)	−	−	+
f(x)	−	+	−

Man darf den Vorfaktor $-\frac{1}{2}$ nicht vergessen, ansonsten ergibt sich das Vorzeichen ganz analog zu der Vorzeichentabelle aus (a). Nun kann man auch hier aus der letzten Zeile die Lösungsmenge der Ungleichung $f(x) < 0$ ablesen.
Es ist $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x < -\frac{1}{2} \text{ oder } x > 2\}$.

Aufgaben 1. Lösen Sie die folgenden linearen Ungleichungen rechnerisch:

(a) $x - 3 > \frac{1}{2}x + 4$
(b) $2x - 7 \geq 3x + 4$
(c) $\frac{2}{3}x - 5 > \frac{1}{2}(3x + 2)$
(d) $-2(-3 - x) \geq (4 - x)$
(e) $(x + 2)^2 > (x + 2)(x - 2)$
(f) $x^2 - \frac{5}{3} \geq x^2 - 4x + 8$

2. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen zeichnerisch oder rechnerisch:

(a) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + 3 \geq 0$
(b) $(x + 3)(x - 5) + 2 < x - 2$
(c) $(b^2 - 3) > 0$
(d) $3 \leq l(l + 4) + 3$
(e) $\frac{1}{3}r^2 - \frac{1}{3}r - 2 \leq 0$
(f) $y^2 - \frac{5}{3} \geq -4y + 8$
(g) $(x^2 + 1) \leq 0$
(h) $(x + 3)^2 > 0$

3. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen mit Parameter rechnerisch (dabei ist jeweils $a \in \mathbb{R}$):

(a) $a(x - 2)(x + 3) > 0$
(b) $a(x + \frac{1}{2})(x - 3) \geq 0$
(c) $-x^2 + ax - 3x + 3a < 0$
(d) $0 \leq -2x^2 - 2ax + 2x + 2a$