Verhalten bei Definitionslücken

Gegeben ist eine Funktion f mit einer Definitionslücke an der Stelle x_0. Ist das Verhalten bei der Definitionslücke gefragt, dann geht es um die Frage, was passiert mit den Funktionswerten, wenn man sich der Stelle x_0 von links und von rechts annähert. Dies kann man mathematisch notieren als die beiden Grenzwert:

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ (linksseitig) und $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (rechtsseitig)

Für das Ergebnis dieser Grenzwerte gibt es verschiedene Möglichkeiten:

<table>
<tr><td colspan="2">Ist von der Funktion f die Definitionslücke x_0 ...</td></tr>
<tr>
<td>... stetig behebbar, dann ist das Ergebnis von
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$
eine konkrete Zahl.

Man kann diese Zahl (also das Ergebnis des Grenzwertes) bestimmen, indem man die stetige Fortsetzung von f an dieser Stelle bestimmt und dann x_0 in die stetige Fortsetzung einsetzt.
Anders formuliert: Man kürzt den Linearfaktor $(x - x_0)$ komplett aus dem Nenner und setzt dann x_0 ein.</td>
<td>... eine Polstelle, dann ist das Ergebnis von
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$
entweder ∞ oder $-\infty$

Man kann das genaue Ergebnis bestimmen, indem man zuerst $(x - x_0)$ so oft es geht kürzt und dann zunächst Zähler und Nenner getrennt voneinander untersucht. Im Nenner taucht $(x - x_0)$ dann noch immer auf und geht für $x \to x_0$ gegen 0^+ oder 0^-. Das Ergebnis im Nenner ist also 0, aber „auf dem Weg dorthin“ positiv (0^+) oder negativ (0^-)</td>
</tr>
<tr>
<td>Man nennt so eine Polstelle auch Polstelle ohne Vorzeichenwechsel

Man nennt so eine Polstelle auch Polstelle mit Vorzeichenwechsel</td>
<td>Ist x_0 eine Polstelle mit Ordnung ...
<table>
<tr>
<td>2, 4, 6,...
dann ist
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$
Also beide Grenzwerte sind gleich, entweder ∞ oder $-\infty$</td>
<td>1, 3, 5, ...
dann ist
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$
Also beide Grenzwerte sind verschieden. Einer ist ∞ der andere $-\infty$</td>
</tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{(x-2)^2(x+3)}{(x-2)^2(x-3)}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$. Die Funktion hat die beiden Definitionslücken 2 und 3. Wir untersuchen zunächst das Verhalten an der stetig behebbaren Definitionslücke 2: Es gilt $f(x) = \frac{(x-2)^2(x+3)}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{(x+3)}{(x-3)}$. Setzen wir nun in $\bar{f}(x) = \frac{(x+3)}{(x-3)}$ mit $D_{\bar{f}} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ die Zahl 2 ein, so erhalten wir:

$\bar{f}(2) = \frac{(2+3)}{(2-3)} = \frac{5}{-1} = -5$, also gilt:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \bar{f}(2) = -5$$

Untersuchen wir nun die Annäherung an die Polstelle bei 3, die die Ordnung 1 hat. Auch hier kürzen wir zunächst und betrachten $f(x) = \frac{(x+3)}{(x-3)}$:

Für den linksseitigen Grenzwert bei 3 gilt dann:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{\overbrace{(x+3)}^{\to 6}}{\underbrace{(x-3)}_{\to 0^-}} = -\infty$$

(denn der Nenner ist kleiner als 0 und geht gegen 0 und der Zähler ist eine positive Zahl)

Für den rechtsseitigen Grenzwert bei 3 gilt dann:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{\overbrace{(x+3)}^{\to 6}}{\underbrace{(x-3)}_{\to 0^+}} = \infty$$

(denn der Nenner ist größer als 0 und geht gegen 0, der Zähler ist eine positive Zahl)

Da die Polstelle 3 die Ordnung 1 hat, ist es eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel. Wir hätten daher den rechtsseitigen Grenzwert nicht unbedingt berechnen müssen: Da wir schon berechnet hatten, dass $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ ist, wussten wir auch, dass $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$ sein muss.