Lösungen

(a) $f(x) = \frac{x(x-1)^2(x+2)^3(x-3)^4}{(x+4)^5x^2(x+2)^3}$
NS des Nenners: Ablesen: $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$. Es folgt: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, -2\}$.
NS des Zählers: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 3$. Damit sind NS von f: 1 und 3 (die restlichen Nullstellen des Zählers sind Definitionslücken).
Für die Art der Definitionslücke: Kürzen: $f(x) = \frac{x(x-1)^2(x+2)^3(x-3)^4}{(x+4)^5x^2(x+2)^3} = \frac{(x-1)^2(x-3)^4}{(x+4)^5x}$.
Hieraus erkennt man: Die Linearfaktoren von der NS -2 konnte man vollständig kürzen, also ist hier eine stetig behebbare Definitonslücke, 0 ist nach wie vor NS des Nenners, also ist hier eine Polstelle der Ordnung 1 (da nur noch der Faktor $x^{\mathbf{1}}$ im Nenner auftaucht), -4 ist eine Polstelle der Ordnung 5 (-4 ist NS des Nenners in gekürzter Form, Faktor $(x+4)^{\mathbf{5}}$)

(b) $f(x) = \frac{x^2(x-7)^2(x+1)^2}{3\cdot(x-7)(x+1)}$
NS des Nenners: Ablesen: $x_1 = 7$, $x_2 = -1$. Es folgt: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{7, -1\}$.
NS des Zählers: $x_1 = 0$, $x_2 = 7$, $x_3 = -1$. Damit ist NS von f: 0 (die restlichen Nullstellen des Zählers sind Definitionslücken).
Für die Art der Definitionslücke: Kürzen: $f(x) = \frac{x^2(x-7)^2(x+1)^2}{3\cdot(x-7)(x+1)} = \frac{x^2(x-7)(x+1)}{3} = \frac{1}{3}x^2(x-7)(x+1)$.
Hieraus erkennt man: Die Linearfaktoren von den NS 7 und -1 konnte man vollständig kürzen, also sind hier stetig behebbare Definitonslücken.

(c) $f(x) = \frac{x^2-2x}{(x-2)^2(x+4)}$
NS des Nenners: Ablesen: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$. Es folgt: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, -4\}$.
NS des Zählers: (x ausklammern:) $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$. Es folgt: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Damit ist NS von f: 0 (die andere Nullstelle des Zählers ist eine Definitionslücke).
Für die Art der Definitionslücke: Kürzen: $f(x) = \frac{x^2-2x}{(x-2)^2(x+4)} = \frac{x(x-2)}{(x-2)^2(x+4)} = \frac{x}{(x-2)(x+4)}$
Hieraus erkennt man: Bei 2 und auch -4 sind jeweils Polstellen der Ordnung 1 (siehe Nenner).

(d) $f(x) = \frac{2-4x}{(x+1)^2-4x}$
NS des Nenners: Hier muss man die Nullstelle berechnen, da im Nenner eine Differenz steht und kein Produkt. Es ergibt sich: $(x+1)^2 - 4x = x^2 + 2x + 1 - 4x = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Also ist die NS des Nenners bei $x_1 = 1$.
NS des Zählers: Aus $2 - 4x = 0$ folgt $x = \frac{1}{2}$. Damit ist NS von f: $\frac{1}{2}$. Diese ist keine Nullstelle des Nenners, daher kann man auch nicht kürzen. Bei 1 ist somit eine Polstelle der Ordnung 2 (siehe Nenner).

(e) $f(x) = \frac{x^4-8x^2+16}{x^3-12x+16}$
NS des Nenners: $x^3 - 12x + 16 = 0$. Man muss eine NS raten: Der TR liefert $x_1 = 2$. Mit einer Polynomdivision folgt: $(x^3 - 12x + 16) : (x-2) = x^2 + 2x - 8$. Weitere NS erhält man mit der MNF: $x_{2,3} = \frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2\pm6}{2}$. Es ergibt sich $x_2 = 2$ und $x_3 = -4$. Somit gilt $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$. Insbesondere ist auch $x^3 - 12x + 16 =$ (Linearfaktorzerlegung, siehe NS).
NS des Zählers: $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ kann man mit Substitution lösen: Mit $x^2 = u$ erhält man: $u^2 - 8u + 16 = 0$. Diese Gleichung kann man mit der MNF lösen: $u_{1,2} = \frac{8\pm\sqrt{64-64}}{2} = 4$ Die Resubstitution $u = x^2$ ergibt $x_{1,2} = \pm2$ (je mit VFH 2). Damit sind die NS des Zählers bei -2 und 2. Man kann den Zähler somit schreiben als $x^4 - 8x^2 + 16 = (x-2)^2(x+2)^2$
Damit ist NS von f: -2. Mit der LFZ von dem Zähler und Nenner von f ergibt sich durch kürzen: $f(x) = \frac{x^4-8x^2+16}{x^3-12x+16} = \frac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x-2)^2(x+4)} = \frac{(x+2)^2}{(x+4)}$. Man erkennt, dass 2 eine stetig behebbare Definitionslücke des Zählers ist. Bei -4 ist eine Polstelle der Ordnung 1.