

Nullstellen und Polstellen gebrochenrationaler Funktionen

Einführung: Um die Nullstellen von einer gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ zu berechnen, muss man sich nur an eine Bruchrechenregel erinnern: Ein Bruch ist dann 0, wenn der Zähler 0 ist. Berechnen wir also die Nullstellen des Zählers g , dann erhalten wir die Nullstellen der Funktion f , falls f für diese Werte definiert ist.

Beispiele: (a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{(x-4)(x+2)^2}{(x+2)}$. Die Nullstellen des Zählers können wir ablesen. Sie sind bei $x_1 = 4$ und bei $x_{2,3} = -2$. Jedoch ist bei $x_{2,3} = -2$ auch der Nenner 0. Weil damit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ist, hat f nur die Nullstelle bei $x_1 = 4$.

(b) Die Funktion $f(x) = \frac{x^3(x+2)^2(x-2)^2}{x(x-2)^2}$ ist nicht definiert für $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ (Nullstellen des Nenners, man kann sie ablesen). Also ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Die Nullstellen des Zählers sind bei $x_1 = 0$, $x_{2,3} = -2$ und bei $x_4 = 2$. Weil die Funktion bei 0 und -2 nicht definiert ist, können dort auch keine Nullstellen sein. Die einzige Nullstelle ist somit bei $x_1 = 2$.

(c) Bei der Funktion $f(x) = \frac{x^3-2x^2-3x}{(x+1)^2}$ liest man ab, dass die Nullstelle des Nenners bei -1 ist. Damit gilt $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Die NS des Zählers muss man berechnen. Es gilt $x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0$. Also ist eine Nullstelle des Zählers bei $x_1 = 0$, mit der MNF berechnet man weiterhin: $x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$. somit ist $x_2 = -1$ und $x_3 = 3$. Da -1 nicht zu D_f gehört ist es keine Nullstelle von f . Die Werte 0 und 3 gehören zum Definitionsbereich, sind also Nullstelle des Zählers also auch Nullstelle der Funktion f .

Merke: Um die Nullstelle einer gebrochenrationalen Funktion f zu berechnen, berechnen wir die Nullstelle des Zählers. Nullstellen des Zählers sind genau dann Nullstellen der Funktion f , wenn f dort definiert ist.

Ist x_1 eine Nullstelle des Zählers und auch eine Nullstelle des Nenners, dann befindet sich bei x_1 keine Nullstelle sondern eine Definitionslücke.

Polstellen: Bisher haben wir eine Art von Definitionslücke kennengelernt, nämlich die sogenannte stetig behebbare Definitionslücke. Ob eine solche vorliegt erkennen wir erst, wenn wir die Nullstellen des Zählers betrachten. Anders herum ist es aber auch so: Ob eine Nullstelle des Zählers auch Nullstelle der Funktion ist, hängt davon ab, ob die Funktion an dieser Stelle definiert ist, also ob die Nullstelle des Zählers auch Nullstelle des Nenners ist.

Beispiele: (a) Bei der Funktion $f(x) = \frac{(x+1)(x+4)^3(x-2)^2(x-1)}{(x-1)(x-2)(x+4)}$ sind Zähler und Nenner schon in Linearfaktoren zerlegt. Man liest ab: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, -4\}$ (die Nullstellen des Nenners sind Definitionslücken). Kürzt man Linearfaktoren, die in Zähler und Nenner auftauchen, dann erhält man: $f(x) = \frac{(x+1)(x+4)^3(x-2)^2(x-1)}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{(x+1)(x+4)^2(x-2)}{1} = (x+1)(x+4)^2(x-2)$. Die einzige Nullstelle des Zählers, bei der f definiert ist, ist -1 . Damit ist bei -1 die einzige Nullstelle der Funktion f .

Stetig behebbare Definitionslücken kann man nun auch ablesen: Die Funktion f hat stetig behebbare Definitionslücken bei 1, 2 und -4 , denn diese konnte man alle komplett wegekürzen.

(b) Es ist $g(x) = \frac{(x+3)^2(x-3)}{(x+3)(x-3)^2}$. Man kann im Nenner erkennen: Definitionslücken bei -3 und 3 , also gilt $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Kürzt man, so erhält man $g(x) = \frac{(x+3)}{(x-3)}$. Für die Nullstelle des Zählers, nämlich -3 , ist g nicht definiert, also hat g keine Nullstellen. Der Linearfaktor der Nullstelle bei 3 konnte komplett gekürzt werden, also ist hier eine stetig behebbare Definitionslücke. Nach wie vor ist aber in der gekürzten Darstellung der Linearfaktor $(x-3)$ im Nenner vorhanden. Daher ist die Nullstelle 3 keine stetig behebbare Definitionslücke. Sie konnte nicht vollständig wegekürzt werden.

Solche Definitionslücken, die man nicht oder nicht vollständig kürzen kann, nennt man **Polstelle**. Man unterscheidet auch, wie oft dieser Linearfaktor in der gekürzten Darstellung noch vorhanden ist: Die Vielfachheit der Nullstelle des Nenners (wenn dieser so weit wie möglich gekürzt wurde) nennt man die **Ordnung der Polstelle**.

Merke: Definitionslücken einer gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ sind die Nullstellen des Nenners h .

Kürzt man so weit wie möglich alle Linearfaktoren, die in Zähler und Nenner auftauchen, so erkennt man die Art der Definitionslücke:

- ☞ Eine Definitionslücke, die in der gekürzten Darstellung nicht mehr vorkommt, ist eine stetig behebbar Definitionslücke.
- ☞ Eine Definitionslücke, die in der gekürzten Darstellung noch immer vorkommt, ist eine Polstelle.

In der gekürzten Darstellung gilt: Die Ordnung der Polstelle ist die Vielfachheit der Nullstelle des Nenners.

Beispiele: (a) Betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)^2(x+2)^3(x+6)}{(x+6)^3(x-2)^2(x+2)^4}$. Den Definitionsbereich kann man direkt ablesen: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-6, 2, -2\}$. Kürzt man vollständig, so erhält man $f(x) = \frac{(x+1)}{(x+6)^2(x+2)}$. Nun sieht man, dass bei -2 eine Polstelle 1. Ordnung ist (der Linearfaktor $(x+2)$ taucht nur einmal auf). Bei -6 ist eine Polstelle 2. Ordnung (der Linearfaktor $(x+6)^2$ taucht wegen des Quadrats zweimal auf). Weiterhin - siehe Zähler - hat f eine Nullstelle bei -1 .

(b) Betrachten wir die Funktion $g(x) = \frac{x^2-x-12}{2x^2+12x+18}$. So ganz direkt kann man nun weder Nullstellen des Zählers noch des Nenners ablesen. Berechnen wir sie also:

Nullstellen des Nenners: $2x^2 + 12x + 18 = 0$. Mit MNF: $x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144-144}}{2 \cdot 2} = \frac{-12}{4} = -3$. Der Nenner hat also eine doppelte Nullstelle bei -3 . Man erkennt hieraus bereits: $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Nullstellen des Zählers: $x^2 - x - 12 = 0$. Mit MNF: $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$. Der Zähler hat also Nullstellen bei 4 und -3 (beide einfach).

Zerlegt man Zähler und auch Nenner in Linearfaktoren, dann folgt mit Hilfe der berechneten Nullstellen: $g(x) = \frac{x^2-x-12}{2x^2+12x+18} = \frac{(x-4)(x+3)}{2(x+3)^2} = \frac{(x-4)}{2(x+3)}$.

Somit hat g eine Nullstelle bei 4 , die Definitionslücke bei -3 ist eine Polstelle 1. Ordnung.

Aufgaben: Bestimmen Sie von den unten angegebenen Funktionen den maximalen Definitionsbereich, sowie die Art der Definitionslücken. Geben Sie auch die Nullstellen der Funktionen an.

(a) $f(x) = \frac{x(x-1)^2(x+2)^3(x-3)^4}{(x+4)^5x^2(x+2)^3}$

(b) $f(x) = \frac{x^2(x-7)^2(x+1)^2}{3 \cdot (x-7)(x+1)}$

(c) $f(x) = \frac{x^2-2x}{(x-2)^2(x+4)}$

(d) $f(x) = \frac{2-4x}{(x+1)^2-4x}$

(e) $f(x) = \frac{x^4-8x^2+16}{x^3-12x+16}$