Lösungen

(a) $f(x) = \frac{2x^2-4x+2}{(x+4)^2}$
Die NS des Nenners ist bei -4, da dies die Lösung von $x+4=0$ ist. Also gilt: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$. Um zu untersuchen, ob es sich um eine stetig behebbare Definitionslücke handelt, kommt es auf die Nullstellen des Zählers an. Denn, wenn -4 auch NS des Zählers wäre, könnte man den Zähler als Produkt mit dem Faktor $(x+4)$ schreiben. Diesen könnte man dann mit dem Nenner kürzen (eventuell ja auch mehrmals).
Untersuchen wir also die Nullstellen des Zählers: Dazu formen wir um. Es folgt $2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2$. Damit ist die einzige NS des Zählers bei 1. Somit ist die Definitionslücke des Nenners keine stetig behebbare Definitionslücke, man kann sie nicht wegkürzen.

(b) $f(x) = \frac{x^3-4x^2}{2x^3-4x}$
Die NS des Nenners berechnen sich aus $2x^3 - 4x = 0$ wegen $2x(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow 2x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$ zu $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$ und $x_3 = -\sqrt{2}$. Es folgt also $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.
Testen wir auch hier, ob es sich um eine stetig behebbare Definitionslücke handelt, indem wir die NS des Zählers berechnen: Aus $x^3 - 4x^2 = 0$ folgt $x^2(x-4) = 0$. Damit wird der Zähler 0 für $x_{1,2} = 0$ und $x_3 = 4$. Also ist 0 auch NS des Zählers.
Mit der Darstellung als Produkt folgt: $f(x) = \frac{x^2(x-4)}{2x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = \frac{x(x-4)}{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$. Wie man sehen kann, lässt sich x wegkürzen, daher handelt es sich bei $x_1 = 0$ um eine stetig behebbare Definitionslücke.

(c) $f(x) = \frac{x^3-4x^2}{3x^2+4x}$
Die NS des Nenners: $3x^2+4x = 0 \Leftrightarrow x(3x+4) = 0$. Es folgt $x_1 = 0$ oder $3x+4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{4}{3}$. Somit ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{4}{3}\}$.
NS des Zählers: $x^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) = 0$ Also sind die Nullstellen des Zählers bei $x_{1,2} = 0$ und bei $x_3 = 4$. Es folgt $f(x) = \frac{x^3-4x^2}{3x^2+4x} = \frac{x^2(x-4)}{x(3x+4)} = \frac{x(x-4)}{3x+4}$. Also ist bei $x_1 = 0$ eine stetig behebbare Definitionslücke.

(d) $f(x) = \frac{6-6x}{(x+1)^2}$
Die NS des Nenners kann man ablesen. Sie ist bei -1. Somit ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Die NS des Zählers berechnen wir durch Ausklammern: $6 - 6x = 0 \Leftrightarrow 6(1-x) = 0$. Also ist $x_1 = 1$. Damit ist bei der NS des Nenners keine stetig behebbare Definitionslücke.

(e) $f(x) = \frac{x^2-4}{(x-1)^2}$
Auch hier kann man die NS des Nenners ablesen. Sie ist bei 1. Für die NS des Zählers wenden wir die dritte binomische Formel an: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$. Also sind die NS bei 2 und -2. Damit ist bei 1 keine stetig behebbare Definitionslücke.

(f) $f_a(x) = \frac{x^2-ax+1}{x^2}$ für $a \in \mathbb{R}$.
Auch hier kann man die Nullstelle des Nenners ablesen. Sie ist bei 0. Nun hängen die NS des Zählers aber von einem Parameter a ab.
Wäre 0 eine stetig behebbare Definitionslücke, dann würde es einen Wert für a geben, so dass 0 auch NS des Zählers wäre. Dies können wir testen. Setzen wir in den Zähler für x den Wert 0 ein, dann können wir versuchen die Gleichung, die daraus entsteht, nach a aufzulösen: $0^2 - a \cdot 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$. Da dies eine falsche Aussage ist, gibt es keinen Wert für a, sodass bei $x_1 = 0$ auch eine NS im Zähler ist. Somit ist 0, die NS des Nenner, keine stetig behebbare Definitionslücke. Sie lässt sich für keinen Wert von a wegkürzen.