Grundlegendes zu gebrochenrationalen Funktionen

Einführungsaufgabe: Der Kindergarten Rappelkiste will für seine Kleinkindbetreuung einen kleinen Teil des Gartens abgrenzen. Die Abgrenzung soll rechteckig sein und eine Fläche von $12m^2$ haben. Je nachdem, wie lang bzw. breit das Rechteck ist, muss unterschiedlich viel Zaun gekauft werden. Stellen Sie eine Funktion U auf, die beschreibt, wie viel Meter Zaun abhängig von der gewählten Breite b notwendig sind.

Lösung: Der Zaun, der notwendig ist, ist genauso groß wie der Umfang des abgesperrten Rechtecks. Allgemein wird der Umfang U eines Rechtecks durch $U = 2a + 2b$ berechnet, wobei a die Länge und b die Breite des Rechtecks sind.
Es gibt einen weiteren Zusammenhang zwischen a und b. Die Fläche eines Rechtecks ist nämlich $A = a \cdot b$. Da die Fläche $12m^2$ groß sein soll, gilt also $12 = a \cdot b$. Um die Funktion abhängig von der Breite b aufstellen zu können, müssen wir die letzte Gleichung nach a auflösen und in die Gleichung mit dem Umfang einsetzen. Aus der letzten Gleichung folgt: $12 = a \cdot b \Leftrightarrow a = \frac{12}{b}$.
Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich: $U = 2a + 2b = 2 \cdot \frac{12}{b} + 2b = \frac{24+2b^2}{b}$.
Die gesuchte Funktion lautet somit: $U(b) = \frac{24+2b^2}{b}$.
Dies ist eine Funktion, bei der die Variable auch im Nenner vorkommt.

Definition: Funktionen der Form $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, bei denen sowohl g als auch h ganzrationale Funktionen sind, nennt man **gebrochenrationale Funktionen**. Hierbei darf h nicht die Nullfunktion sein, also die Funktion $h(x) = 0$.
Die Funktion, die im Beispiel aufgetaucht ist, ist also eine gebrochenrationale Funktion mit den beiden ganzrationalen Funktionen $g(b) = 24 + 2b^2$ und $h(b) = b$.
Viele der Werkzeuge, die man von ganzrationalen Funktionen kennt, lassen sich auch auf gebrochenrationale Funktionen anwenden oder zumindest so verallgemeinern, dass man sie anwenden kann.

Maximaler Definitionsbereich: Im Gegensatz zu ganzrationalen Funktionen kann es sein, dass sich gebrochenrationale Funktionen nicht mehr für alle reellen Zahlen definieren lassen.
Beispiele: (a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2-2}{x+5}$. Für $x_1 = -5$ hätte man im Nenner 0 stehen. Da man nicht durch 0 teilen darf, ist der maximal mögliche Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Man sagt, dass -5 eine **Definitionslücke** der Funktion f ist.

(b) Die Funktion $g(x) = \frac{x^3}{x}$ ist nicht definiert für $x_1 = 0$ (Nullstelle des Nenners). Also ist $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jedoch ist die 0 auch eine Nullstelle des Zählers, so dass man eigentlich den Faktor x herauskürzen kann. Man kann die Funktion also darstellen als $g(x) = \frac{x^3}{x} = x^2$. Trotzdem ist wegen der vorgegebenen Darstellung als Bruch aber $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Man sagt, dass die 0 eine stetig behebbare Definitionslücke ist. Eine stetig behebbare Definitionslücke lässt sich aus der Funktionsgleichung herauskürzen
(c) Bei der Funktion $h(x) = \frac{(x^2-9)(x-4)}{(x+3)(x-2)}$ liest man ab, dass die Nullstellen des Nenners bei -3, und 2 liegen. Damit gilt $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$. Wegen $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ erkennt man, dass -3 auch eine Nullstelle des Zählers ist, also lässt sich der Faktor $(x-3)$ kürzen. Folglich ist -3 eine stetig behebbare Definitionslücke.

Merke: Eine gebrochenrationale Funktion f hat die Form $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, wobei g und h ganzrationale Funktionen sind und $h \neq 0$ gilt.
Definitionslücken einer gebrochenrationalen Funktion f sind die Nullstellen des Nenners h.
Stetig behebbare Definitionslücken sind Definitionslücken, die man als Linearfaktor wegkürzen kann, weil auch im Zähler dieser Linearfaktor auftaucht.

Aufgaben: Bestimmen Sie von den unten angegebenen Funktionen den maximalen Definitionsbereich. Untersuchen Sie zudem, welche der Definitionslücken stetig behebbare Definitionslücken sind.

(a) $f(x) = \frac{2x^2-4x+2}{(x+4)^2}$

(b) $f(x) = \frac{x^3-4x^2}{2x^3-4x}$

(c) $f(x) = \frac{x^3-4x^2}{3x^2+4x}$

(d) $f(x) = \frac{6-6x}{(x+1)^2}$

(e) $f(x) = \frac{x^2-4}{(x-1)^2}$

(f) $f_a(x) = \frac{x^2-ax+1}{x^2}$ für $a \in \mathbb{R}$